1) Переключательные функции, способы задания переключательных функций, основные свойства.

Предположим, у нас есть множество векторов Х = {x1, x2... xn}, координаты которого могут принимать одно из 2х значенией(0 или 1).

Тогда множество Х имеет 2^n векторов.Сопоставим каждому элементу множества 0 или 1, иначе говоря, отобразим в множестве Y = {0,1}2

Определение 1.1.1. Функцией алгебры логики, или переключатель-

ной функцией, называется функция, дающая однозначное отображе-

ние X? в Y [1].

Способ задания:

переключательная функция может

быть задана таблицей, в которой перечислены все возможные значения

аргументов функции (наборы) и соответствующие этим наборам значения

функции. Такой вид отображения называется таблицей истинности.

Свойства:

1) Если есть 2 функции, с одинаковым колличеством аргументов, при том на одинаковых аргументах они имеют одинаковые значения, то такие функции называютс равными.

2) Если f(x1, x2, 0, xn) != f(x1, x3, 1, xn), то функция зависит от х. Иначе функция независит от х, и он является "фиктивным элементом".

2) Переключательные функции одной и двух переменных:

Одной:

Существуют 4 переключательные функции 1 аргумента.

Когда функция равна:

f = 1 - константа единица

f = х - переменная х

f = не(х) - инверсия х

f = 0 - константа нуль.

Двух:

Существуют 16 переключательных функций от двух переменных.

f = 1 - константа единица

f = х - переменная х

f = не(х) - инверсия х

f = 0 - константа нуль

f = у - переменная у

f = не(у) - инверсия у

К ним можно добавить Стрелочку Пирса, Штрих Шефера.

3) Основные законы алгебры логики:

Есть 4 закона алгебры логики, которые определяют Не и илИ в разных порядках.

а)Переместительный(комунитативный):

х1 и х2 = х2 и х1. х1 или х2 = х2 или х1

Менять местами можно коньюнкцию(и) или дизъюнкицию(или), или сумму.

б)Сочетательный(асоциативный):

х1 и х2 и х3 = х1 и (х2 и х3)

Скобочки можно ставить между равнозначными операциями.

в) Распределительный(дистребутивный):

(х1 и х2) или х3 = (х1 или х3) и (х2 или х3)

Разделяй и влавствуй!

г) Закон инверсии (Де Моргана):

не(х1 и х2) = не(х1) или не(х2).

не(х1 или х2) = не(х1) и не(х2).

Когда целое выражение находится под "не".

4) Следствия из законов алгебры логики:

При решении задач, приходится встречатся с задачами содержащими сложения\отрицания, дизъюнкции. Их следуюет выполнять поочерёдно -

первое отрицания, затем конъюнкция, после дизъюнкция.

Колличество сомножителей в элементарной конъюнкции, называется её рангом.

Две конъюнкции называются соседними, если отличаются знаком лишь одного элемента.

Логическую сумму двух соседних произведений некоторого ранга r можно заменить одним элементарным

произведением ранга r-1, являющимся общей частью исходных слагаемых.

Логическое произведение двух соседних сумм ранга р можно заменитть на логическое произведение двух сумм ранга р-1(там была конъюнкция, тут дизъюнкция).

Логическую сумму двух элементарных произведений можно заменить на разных рангов, один из которых является собственной частью другого, можно заменить на

сумму меньшего ранга.

5)Теорема о функциональной полноте:

Для того чтобы система переключательных функций была функционально полной, необходимо и достаточно,

чтобы эта система включала:

• хотя бы одну переключательную функцию, не сохраняющую нуль;

• хотя бы одну переключательную функцию, не сохраняющую единицу;

• хотя бы одну нелинейную переключательную функцию(можно представить в виде полинома жегалкина, только в чистом виде).;

• хотя бы одну немонотонную переключательную функцию(монотонная - если при увеличении аргумента значени функции не убывает);

• хотя бы одну несамодвойственную переключательную функцию(на противоположных векторах меняет значения).

6) Основная функционально полная система логических связей:

Набор из НЕ, И, Или, является фукционально полной системой логических связей.

• f10 – инверсия (логическая связь НЕ, логическое отрицание);

• f1 – конъюнкция (логическая связь И, логическое умножение),

• f7 – дизъюнкция (логическая связь ИЛИ, логическое сложение).

7)Теорема Жегалкина. Алгебра Жегалкина.

Любая переключательная функция может быть записана в виде полинома(многочлена), иначе говоря

ax1+ax2+ax3+...+axn,

Где аx -константы, которые могут принимать значени 0 или 1, а + это операция сложения по модулю 2(1+1 = 0, если что. А вот 0+1 = 1)

Алгеброй Жегалкина называется алгебра над множеством логических функций и переменных, сигнатура которых отображается через +, и константы 0, 1.

Алгебра:

Записываем таблицу. Затем пишем это в виде суммы конституент единицы, потом проводим между ними сумму. Отрицание заменяем на 1+положительная переменная.

Потом избавляемся от лишнего, и получаем решение в виде суммы полиномов.

8) Операции Пирса и Шеффера.

Стрелочка Пирса - принимает 1, только если 2 аргумента имеют 0. не(х1 и х2).

Штрих Шеффера - принимает 0, когда все аргументы равны 1. видим как не(х1 \* х2).

9) Минимизация переключательных функций. Метод импликантных матриц

Минимизация нужна для упрощения функций. Начнём с того, что такое импликанты:

Если есть функция f1(x1, x2..., xn) которая входит в функцию f2(x1, x2, ..., xn), то она

называется импликантой этой функции.

Метод импликантных матриц - записываем в столбец все конституенты, которые равны единице, а в строки -

все простые матрицы соответственно.

F1 называется простой импликантой, если она входит в F2, но никакая собственная часть F2 не входит в F1.

Любая функция является дизъюнкцией входящих в неё импликант.

Теорема Квайна: Если в СДНК совершить все операции склеивания, поглощения, и после получения сдф взять дизъюнкцию всех простых

импликант, то в результате будет

получена сокращённая дизъюктивная форма, или дизъ.кция всех простых импликант.

Метод импликантной матрицы:

Записываем таблицу, где в ряд будем записывать простые импликанты, а в столбец - конституэнты единицы.

Аналогия первой лабы.

10)Метод испытания импликант:

Метод испытания импликант заключается в поочерёдном удалении импликант из сднф, с проверкой, чтоыбы оставшееся выражение такие

значения, которые обращают

оставшуюся эмпликанту в единицу. Если это выражение будет тождественно равно единице, то импликанта лишняя.

11) Минимизация переключательных функций с помощью диаграмм Вейча:

Диаграмма вейча - специальная таблица, созданная для определения значений функции на каждом наборе.

Строим таблицу, которая будет определять значения переключательной функции на каждом наборе. Строим по аналогии с Карно,

записываем нули и единицы.

С помощью этой таблицы легко определить соседние эмпликанты, а также найти минимальную ДНФ.

12)Совершенная дизъюнктивная нормальная форма:

Дизъюнкция конституент единицы, равных единице на тех же наборах, что и заданная функция, называется совер-

шенной дизъюнктивной нормальной формой переключательной функ-

ции.

В ней нет одинаковых элементарных конъюнкций.

в каждой конъюнкции нет одинаковых пропозициональных букв

каждая элементарная конъюнкция содержит каждую пропозициональную букву из входящих

в данную ДНФ пропозициональных букв, причем в одинаковом порядке.

Произведение конституент нуля, которые рав-

ны нулю на тех же наборах, что и заданная функция, называется со-

вершенной конъюнктивной нормальной формой.

в ней нет одинаковых элементарных дизъюнкций

в каждой дизъюнкции нет одинаковых пропозициональных переменных

каждая элементарная дизъюнкция содержит каждую пропозициональную букву из входящих в данную КНФ пропозициональных букв.

13)Вхождение функции в функцию. Импликанты. Способы получения всех простых импликант.

Если функция входит в функцию, то она называется импликантой. При чём, если ни одна из импликант старшей функции не входит в импликанту, то эта импликанта называется

простой.

Чтобы получить все простые импликанты, нужно написать сокращённую дизъюктивную форму, а потом провести склеивание.

14)Теорема Квайна:

Если в совершенной дизъюнктивной нормальной форме переключательной функции выполнить все опе-

рации неполного склеивания, а затем все операции поглощения, то в результате будет получена

сокращенная дизъюнктивная нормальная форма этой функции, или дизъюнкция всех ее простых импликант.

15)Правило развёртывания логических выражений:

Иногда нужно провести операцию, обратную склеиванию. (т.е. нам нужно представить выражение в виде совокупности коституент

единицы или нуля. Тогда, мы должны выполнить 3 этапа:

• в развертываемую элементарную конъюнкцию ранга r в качестве дополнительных сомножителей вводится п-r

единиц, где п ранг конституенты;

• каждая единица представляется в виде дизъюнкции(т.е. "Или") некой переменной и и её отрицания(к примеру х или не(х)).

• Раскрываем скобки в полученном выражении, получая развёртывание стандартной конъюнкции ранга r в логическую сумму консти

туент единицы.

16)Конституенты. Свойства. Правила.

Конституентами называются некоторые виды переключательной функции. К примеру:

Конституента единицы: Конституентой единицы называется переключательная функция n аргументов, которая принимает значение

единицы на одном единственном наборе аргументов.

Конституентой нуля называется переключательная функция n аргументов, которая принимает значение единицы на одном единственном

наборе аргументов.

Любая переключательная функция может быть представленна в виде полинома Жегалкина(а это тут к чему? Но в параграфе было).

17) Пять классов переключательной функции:

а)Переключательные функции, сохраняющие нуль(если функция имеет значение 0 на нулевом наборе аргументов).

б)Переключательные функции, сохраняющие единицу(если переключательная функция имеет значение 1 на единичном наборе аргументов.).

в)Монотонные переключательные функции(если при возрастании набора значений .

г)Самодвойственные переключательные функции(если наборы с противоположными значениями(001 и 110) имеют разные значения).

д)Линейные переключательные функции. (Когда можно представить в виде полинома Жегалкина).

18) Второй метод получения минимальных КНФ

1. Записывают дизъюнкцию всех конституент единицы, которые не вхо-

дят в СДНФ заданной функции.

2. Находят минимальные ДНФ по рассмотренным алгоритмам.

3. От полученных минимальных форм берут отрицания, и после преобра-

зований по формулам де Моргана получают конъюнктивные формы, ко-

торые будут минимальными.

19) Минимизация неполностью определённых переключательных функций

Самый простой способ решить неполностью определённую переключательную функцию - построить карту Карно, а затем

найти Конъюкцию или дизъюкцию, путём замены неустановленных элементов на 1 или 0.

Минимальная ДНФ

функции f(x1, x2, …, xn) совпадает с дизъюнкцией самых коротких

пликант эквивалентной функции ?1(x1, x2, …, xn), которые совместно

поглощают все конституенты единицы функции ?0(x1, x2, …, xn) и ни

одна из которых не является лишней.

(делаем как на первой лабе короче).

20) Графы. Основные понятия и определения:

Графом называется связи между объектами определённой природы.

Множество X={x1, x2, …, xk, …} и набор E пар объектов

вида {xi, xj} или (xi, xj) из множества X называется графом.

Граф, состоящий из вершин и соединяющих их ребер, называется не-

ориентированным, а граф, состоящий из вершин и соединяющих их дуг, –

ориентированным, или кратко орграфом.

Вершина графа, которая не смежна ни с какой другой вершиной графа(тоесть не соединена ни с чем(возможно кроме себя)),

называется изолированной.

Неориентированный граф - граф, не имеющий стрелочек.

Геометрический граф - граф, заданный в евклидовом пространстве.

Сумма степеней равна колличеству рёбер \* 2.

Графы бывают:

Обыкновенные(без дуг и петель).

Псевдограф(если есть петля).

мультиграф(имеет параллельные рёбра).

Нуль граф(юез петель).

Граф, состоящий из ребер и вершин(рёбра - когда не важно, что куда идёт), называется наориентированным, а из вершин и дуг

(т.е. дуга указывает, что куда идёт) - ориентированным - орграфом.

Граф называется планарным, если мы можем отобразить его на плоскости без пересечения ребер.

Гомеоморфные графы — графы, получаемые из одного графа с помощью последовательности подразбиений рёбер.

21) Теорема о реализуемости графа в трёхмерном евклидовом пространстве:

Каждый конечный граф может быть реализован в трёхмерном Евклидовом пространстве

Предположим у нас есть граф имеющий м вершин и н рёбер. Тогда, выберем произвольную плоскость, и отобразим на ней точки м.

им в соответстие поставим рёбра н, и получим модель в трхмерном евклидовом пространстве.

22) Теорема Понтрягина и Куратовского:

Граф планарен, если ни один из его подграфов не гомеоморфен графам K5 и K3,3.

Граф G\_1 гомеоморфен G\_2 , если G\_1 можно получить из G\_2 с помощью конечного числа применений

процедур включения и исключения вершин степени 2.

23) Основные типы графов

Пустой граф - если в графе нету рёбер.

Полный - где 2 любые вершины соединены ребром.

Замкнутый граф(есть места соединения между вершинами).

Планарный граф.

Гомеоморфный граф.

Нуль граф(нет петель). Псевдо граф(с петлёй). Мульти граф.

Ориентированный и неориентированные графы.

24) Эйлеровы графы:

Эйлеров граф - это граф, содержащий Эйлеров путь.

Эйлеров путь - это путь, проходящий по всем рёбрам графа только 1 раз.

25) Матрицы смежности вершин графов

Матрицей смежности вершин ориентированного графа G

называется квадратная матрица A(G)=[aij] порядка n (n – число вершин

графа), элементы которой aij равны числу дуг, исходящих из вершины xi и

заходящих в вершину xj.

26) Матрицы смежности вершин орграфов:

Любой ориентированный граф можно представить в виде матрицы. Матрица смежности -

ЭТО один из способов представления графа в виде марицы.

Строится так: в ряд и столбцы ставим точки, если строка соединена со столбцом прямой,

то ставим 1

Если дуга исходит из точки, ставим -1, если входит 1. Если дуг нет, то 0.

Свойство: Сумма столбцов должна быть равна 0.

27) Матрицы инцидентности графов и орграфов:

Одна из форм представления графов, в которой в ряд записываются вершины, а в столбец

записываются рёбра. При чём, если исходит из ребра - 1, а входит - 1.

28)Декартово произведение графов.

Пусть нам даны 2 графа - G1(X, E1) И G2(Y, E2). Тогда, декартовым произведением гравоф будет называться

граф с множеством вершин X\*Y, в котором дуга(ребро), идущая из вершины (xi yj) в (xk yl), существует, только

если существует дуга (xi, xk), пренадлежащая множеству дуг Е1 и j = l, или когда есть дуга (yi, yl), принадлежащая

множеству дуг Е2 и i = k.

Алгоритм - берём первый граф. Рисуем граф размерности рёбер^2, по диагонали ставим единичные матрицы, к ним.

А потом на все места, где в первой матрице единица, дорисовываем вторую матрицу.

Для графического - Переносим один граф в одну ось (Х), второй - во вторую (У), и отображаем один через другой.

29)Произведение графов:

Пусть нам даны 2 графа - G1(X, E1) И G2(Y, E2). Произведением их будет граф X\*Y, а дуга из вершины(xi yj) в вершину

(xk, yl) существует только тогда, когда существуют дуги (xi, xk) э E1, и (yj, yi) э E2.

Пишем пути первого графа(типо х1 х2) и ставим в соответствие все пути из второго(у1 у2 например).

30)Композиция графов:

Пусть G1(X,E1) и G2(X,E2) — два графа с одним и тем же множеством вершин X.

Композицией G1(G2) графов G1 и G2 называется граф с множеством вершин E, в

котором существует дуга (xi,xj) тогда и только тогда, когда существует дуга (xi,xk),

принадлежащая множеству E1, и дуга (xk,xj), принадлежащая множеству E2.

Алгоритм:

Рисуем в первом графе путь от первой точки ко второй.

Ставим этому в соответствие все пути из точки, находящийся во втором графе,

все пути из второго графа. Потом берём из первого соответствия перое числа, а

из вторых соответствий - второе, и получаем пути новоо графа.

31)Основные операции графов в матричной форме

Объединение.

Пересечение.

Композиция.

Прямое произведение графов.

Декартово произведение графов.

32)Внутренние и внешние устойчивые множества вершин:

Путь задан некий граф G(X, ГХ), тогда, рассмотрим такое подмножество его вершин

S э X, в котором 2 любые точки являются несмежными. Тогда такое подмножество называется

внутренне устойчивым.

Внутренне:

Внутренне устойчивое множество вершин S называется максимальным (тупиковым), если всякое

собственное надмножество множества S внутренне устойчивым уже не является.

Внутренне устойчивое множество S называется наибольшим, если среди всех

внутренне-устойчивых множеств вершин в G оно имеет наибольшую мощность.

Внешне устойчивое:

Определение: Внешне-устойчивое множество T называется минимальным (тупиковым),

если Т не содержит в себе подмножеств, являющихся внешне устойчивыми.

Внешне-устойчивое множество вершин называется наименьшим,

если среди всех внешне-устойчивых множеств вершин в G оно имеет наименьшую мощность.

33) Теоремы Эйлера о графах.

Эйлеров путь (эйлерова цепь) в графе — это путь, проходящий по всем рёбрам графа и притом только по одному разу.

Эйлеров цикл — это эйлеров путь, являющийся циклом.

Эйлеров граф — граф, содержащий эйлеров цикл.

Полуэйлеров граф — граф, содержащий эйлеров путь (цепь).

Эйлеров цикл в связном неориентированном графе

G(X, E) существует только тогда, когда все его вершины имеют четную степень.

Связный неориентированный граф G обладает эйлеровой

цепью тогда и только тогда, когда число вершин нечетной степени в нем

равно 0 или 2, причем если это число равно нулю, то эйлерова цепь будет

являться и циклом.

34) Операции на графах. Объединение и пересечение(ТУТ И так всё понятно).

35) Связные графы. Основные понятия. Компонента связности.

Компонента связности - некоторое множество вершин графа, такое, что для двух вершин из этого

множества есть путь из одной в другую, и нет пути из вершины

этого множества в вершину не из этого множества.

Граф, содержащий ровно одну компоненту связности. Это означает, что между

любой парой вершин этого графа существует как минимум один путь.

Ориентированный граф называется сильно-связным, если в нём существует (ориентированный) путь из любой вершины в любую другую, или, что эквивалентно, граф содержит ровно одну сильно связную компоненту.

Ориентированный граф называется слабо-связным, если является связным неориентированный граф, полученный из него заменой ориентированных рёбер неориентированными.

36) Графы деревья. Свойства. Теорема А. Кэлли.

Дерево - это связный граф, которые не имеет в себе циклов.

Ориентированное дерево - граф, который имеет точку, в которую ничего не входит(корень), но из которой исходит

одна дуга. А все остальные точки не имеют дуг возврата(дуги исходят лишь из них).

Также бывают двоичные деревья, n-нарные деревья.

Степень узла — количество исходящих дуг (или, иначе, количество поддеревьев узла).

Концевой узел (лист, терминальная вершина) — узел со степенью 1 (то есть узел, в который ведёт только одно

ребро; в случае ориентированного дерева — узел, в который ведёт только одна дуга и не исходит ни одной дуги).

Узел ветвления — неконцевой узел.

Уровень узла — длина пути от корня до узла. Можно определить рекурсивно:

Теорема А. Келли - для дерева с n вершинами можно составить только n^(n-2) деревьев. (Тоесть 1 дерево с двумя вершинами, 3 дерева с тремя, 16 с 4мя).

37) Гамильтоновы графы.

Гамильтонов граф - граф, содержащий гамильтонову цепь или цикл.

Гамильтонов путь - это путь по графу, который предусматривает проход по всем вершинам один раз.

Если начальная и конечная точки равны, то это называется "гамильтонов цикл".

Условие: Если граф содержит Гамильтонов цикл, то в нём не существует ни одной вершины x(i) с локальной

степенью p(x(i)) < 2.

38) Транспортная сеть. Основные понятия и определения:

Транспортная сеть - ориентированный граф, в котором каждое ребро имеет неотрицательную пропускную способность и поток.

В нём выделяются 2 вершины - источник и сток, такие, что любая вершина лежит на пути из источника в сток.

Целочисленная транспортная сеть - транспортная сеть, все рёбра которой - целые числа.

\*Свойства:

Поток не может превысить пропускную способность.

Поток из а в б должен быть противоположен потоку из б в а.

Разрез (s-t cut) — разбиение множества всех вершин V на два подмножества, A и B, таких что s Э A, t Э B.

39) Поток в транспортной сети.

Потоком в транспортной сети называется целочисленная функция, определенная на любых ребрах транспортной сети и удовлетворяющая следующим свойствам:

1. поток т.с <= пропускная способность ребра.

На всех ребрах значение функции потока не превосходит значения пропускной способности ребра.

2)Величиной потока [ф] = val(ф) называется число, равное сумме функций потока по всем ребрам, выходящим из вершины А или

сумма всех функций потока по всем ребрам, входящим в вершину В.

40) Теорема Форда Фалкерсона:

Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

Достаточность: любой поток между вершинами t и s меньше или равен величине любого сечения.

Пусть дан некоторый поток и некоторое сечение. Величина данного потока складывается из величин «грузов»,

перевозимых по всем возможным путям из вершины t в s. Каждый такой путь обязан иметь общее ребро с данным

сечением. Так как по каждому ребру сечения суммарно нельзя перевести «груза» больше, чем его пропускная способность,

поэтому сумма всех грузов меньше или равна сумме всех пропускных способностей рёбер данного сечения. Утверждение доказано.

41) Алгоритм Форда - Фалкерсона:

Алгоритм Форда — Фалкерсона решает задачу нахождения максимального потока в транспортной сети.

Идея алгоритма заключается в следующем. Изначально величине потока присваивается значение 0: f(u,v)=0 для всех u,v Э V. Затем величина потока итеративно

увеличивается посредством поиска увеличивающего пути (путь от источника s к стоку t, вдоль которого можно послать больший поток).

Процесс повторяется, пока можно найти увеличивающий путь.

44) Разрез транспортной сети:

Разрезом сети называется множество, которому принадлежит исток, и не принадлежит сток.

Т.е. разрез - это минимальное (в смысле отношения включения) множество дуг, удаление которых “ разрывает” все пути, соединяющие исток и сток.

Пропускной способностью разреза называется число , равное сумме пропускных способностей дуг этого разреза.

Разрез называется минимальным, если имеет наименьшую пропускную способность.